- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{x^{2v-1}}{(2v-1)!}$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{!} - \dots = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{x^{2v}}{(2v)!}$

Απόδειξη

Έστω $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Έστω τυχαία ότι ισχύει $f^{(v)}(x) = \sin(x + v\frac{\pi}{2})$

και θδο $f^{(v+1)}(x) = \sin(x + (v+1)\frac{\pi}{2})$, $\forall v \in \mathbb{N}$

Έχουμε:

$$f^{(v+1)}(x) = (f^{(v)}(x))' = \left(\sin(x + v\tfrac{\pi}{2})\right)' =$$
$$= \cos(x + v\tfrac{\pi}{2}) \cdot (x + v\tfrac{\pi}{2})' = \cos(x + v\tfrac{\pi}{2})$$
$$= \sin(x + v\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}) = \sin(x + (v+1)\tfrac{\pi}{2}).$$

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$f^{(v)}(x) = \sin(x + v\frac{\pi}{2})$.

Για $x = 0$, $f^{(v)}(0) = \sin v\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & v = 2k \\ (-1)^{k-1}, & v = 2k-1 \end{cases}$

Άρα, το ανάπτυγμα κατά Maclaurin της συνάρτησης f έχει μόνο τις περιττές δυνάμεις

$$\sin x = \sin 0 + \frac{x}{1!}\cos 0 + \frac{x^3}{3!}(-\cos 0) + \frac{x^5}{5!}\cos 0 - \dots$$

$$\dots + (-1)^v \cdot \frac{x^{2v-1}}{(2v-1)!} + R_v(x) \leftarrow \text{το υπόλοιπο}$$

όμως, όλες οι παράγωγοι της f είναι ομοιόμορφα φραγμένες και άρα $R_v(x) \xrightarrow{v \to \infty} 0$

Δηλαδή η f αναπτύσσεται σε σειρά Taylor με κέντρο το 0.

Όμοια τώρα και για την $g(x)=\cos x$ με επαγωγή αποδεικνύεται ότι:

$g^{(\nu)}(x)=\cos(x+\nu\frac{\pi}{2})$, $\forall \nu\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$, $g^{(\nu)}(0)=\cos\nu\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & \nu=2k-1\\ (-1)^k, & \nu=2k\end{cases}$

Συνεπώς, τώρα ~~το~~ ανάπτυγμα κατά MacLaurin της g θα περιέχει μόνο τις άρτιες δυνάμεις:

$$\cos x=\cos 0+\frac{x^2}{2!}(-1)+\frac{x^2}{4!}\cdot 1-\ldots+$$

$$+(-1)^{\nu}\frac{x^{2\nu-2}}{(2\nu-2)!}+R_\nu(x)$$

και όντας $g^{(\nu)}$ φραγμένες ομοιόμορφα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε $R_\nu(x)\xrightarrow{\nu\to\infty}0$

Συνεπώς, η g αναπτύσσεται σε σειρά Taylor με κέντρο το 0

• $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \dots$

Απόδειξη

Εστω $\varphi(x) = e^x \rightsquigarrow \varphi^{(\nu)}(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
τοτε $\varphi(0) = e^0 = 1$
Το ανάπτυγμα Maclaurin είναι:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + R_\nu(x)$$

$R_\nu(x)$: το υπόλοιπο του Lagrange
τετοιο ώστε:
$R_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu!} e^{\lambda x}$, $0 < \lambda < 1$

(να πουμε ότι κανονικα $R_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu!} f^\nu(\xi)$
αλλάξαμε $0 < \xi < x$ τότε $\xi = \lambda x$ οπου
$0 < \lambda < 1$, για παράδειγμα αν $0 < \frac{3}{2} < 5$
τοτε $\frac{3}{2} = \frac{3}{10} \cdot 5$ με $0 < \frac{3}{10} < 1$ λόγω
ότι βρισκόμαστε στους πραγματικούς)
Ετσι, όπως $e^0 = 1 < e^{\lambda x} < e^x$ τότε $e^{\lambda x}$
φραγμένη με φραγμα το $\max\{1, e^x\}$
δηλαδή $\lim_{\nu \to \infty} R_\nu = 0$ και αρα προκύπτει
το συμπέρασμα

Συμπέρασμα στο Μιγαδικό επίπεδο:

Για τυχόν $z \in \mathbb{C} \rightsquigarrow z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

Έχουμε ότι:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(iy)^v}{v!} =$$

$$= e^x \cdot \left(1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4} + \dots\right) =$$

$$= e^x \left[\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right)\right] =$$

$$= e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = |z| \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Δηλ. $|z| = e^x$ και $\arg e^z = y$

Έτσι, ο τύπος του De Moivre απλοποιείται:

για $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\cos\theta_1), \dots, z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$

$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n (\cos(\theta_1 + \dots \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \dots + \theta_n))$

γίνεται

$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)}$

όπου $r_1 = |z_1|, \dots, r_n = |z_n|$ και

$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\theta_1}, \dots, z_n = |z_n| \cdot e^{i\theta_n}$

Τέλος, ονομάζουμε τον τύπο:

$e^{iy} = \cos y + i \sin y$ τύπο του EULER